

**Демонстрационный вариант
экзаменационной работы по математике (повышенный уровень)
для индивидуального отбора в 8 класс
ГБНОУ КК «Школа «Поколение»**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа включает в себя 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение работы отводится 90 минут. При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.**

Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа, после чего подробно и обоснованно описать решение в бланках ответов. Решения заданий оцениваются в соответствии с критериями, приведенными ниже.

Задания можно выполнять в любом порядке. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

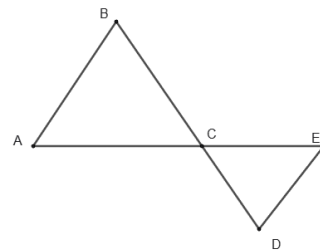
При выполнении заданий 1–7 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его подробное решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво.

1 Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 3x + 5y = 31 \\ 5x + 3y = 25 \end{cases}$$

2 Имеется молоко 5% жирности и 1% жирности. Сколько молока каждого вида надо взять, чтобы получить 3 литра молока, жирность которого составляет 3,2%.

3 Вычислите $(12,64^2 + 11,86^2 - 14,36^2 - 15,14^2) - \left(10\frac{2}{3} - 5\frac{1}{3}\right) : 3\frac{1}{3}$.

- 4 $CD = DE$, отрезок BD пересекает отрезок AE в точке C . Докажите, что прямая AB параллельна прямой DE .



- 5 Внутри треугольника ABC отмечена точка P . Прямые AP и CP пересекают стороны BC и AB в точках D и E соответственно. Известно, что $\angle B = 80^\circ$, $\angle ADC = 100^\circ$ и $\angle AEC = 110^\circ$. Найдите угол APC .

- 6 Постройте графики функций $y = \frac{x+9}{|x+9|}$ и $y = |x+a|$. Найдите все значения параметра a , при которых графики функций $y = \frac{x+9}{|x+9|}$ и $y = |x+a|$ имеют только одну общую точку.

- 7 Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки длиной 3 см и 1 см. Найдите острые углы этого треугольника.

ПОКОЛЕНИЕ
ШКОЛА ТАЛАНТОВ

Решения и критерии оценки

$$\boxed{1} \text{ Решите систему уравнений: } \begin{cases} 3x + 5y = 31 \\ 5x + 3y = 25 \end{cases}$$

Решение.

Умножим первое уравнение на 5, а второе на 3, получим:

$$\begin{cases} 15x + 25y = 155, \\ 15x + 9y = 75. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим: $16y = 80$, отсюда $y = 5$.
Вернёмся к исходной системе, в которую вместо первого уравнения запишем, найденное значение для y .

$$\begin{cases} y = 5, \\ 5x + 3y = 25 \end{cases}, \text{ отсюда } \begin{cases} y = 5, \\ 5x + 3 \cdot 5 = 25 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 5, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: (2; 5)

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущены вычислительные ошибки, с их учетом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

$\boxed{2}$ Имеется молоко 5% жирности и 1% жирности. Сколько молока каждого вида надо взять, чтобы получить 3 литра молока, жирность которого составляет 3,2%.

Решение.

Пусть имеется x (л) молока, жирность которого 5% и y (л) молока, жирность которого 1%. Тогда в x (л) молока содержится $0,05x$ чистого жира, а в y (л) молока содержится $0,01y$ чистого жира. Смешав x и y литров молока, получили 3 литра молока жирностью 3,2%, тогда чистого жира в нём $0,032 \cdot 3 = 0,096$. Учитывая это, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 0,05x + 0,01y = 0,096 \end{cases}$$

Решим полученную систему, для этого умножим второе уравнение на 100, получим:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 5x + y = 9,6 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое, получим: $4x = 6,6$, отсюда:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x = 1,65 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1,65 \\ y = 1,35 \end{cases}$$

Ответ: 1,65; 1,35.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Верно составлена математическая модель задачи, однако решение не доведено до конца. ИЛИ Решение в целом верное, но допущены вычислительные ошибки или не существенные недостатки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

3 Вычислите $(12,64^2 + 11,86^2 - 14,36^2 - 15,14^2) - \left(10\frac{2}{3} - 5\frac{1}{3}\right) : 3\frac{1}{3}$

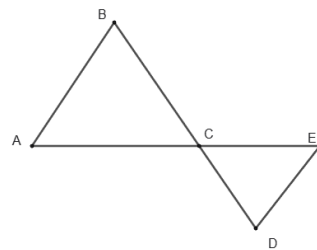
Решение.

$$\begin{aligned} & (12,64^2 + 11,86^2 - 14,36^2 - 15,14^2) - \left(10\frac{2}{3} - 5\frac{1}{3}\right) : 3\frac{1}{3} = \\ & = (12,64^2 - 15,14^2) + (11,86^2 - 14,36^2) - \left(\frac{32}{3} - \frac{16}{3}\right) : \frac{10}{3} = \\ & = (12,64 - 15,14)(12,64 + 15,14) + (11,86 - 14,36)(11,86 + 14,36) - \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{10} = \\ & = -2,5 \cdot 27,78 - 2,5 \cdot 26,22 - 1,6 = -2,5(27,78 + 26,22) - 1,6 = \\ & = -2,5 \cdot 54 - 1,6 = -136,6. \end{aligned}$$

Ответ: -136,6.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, получен верный ответ	2
Решение в целом верное (применены знания о формулах сокращённого умножения), но допущена вычислительная ошибка, не влияющая на ход решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 4) $CD = DE$, отрезок BD пересекает отрезок AE в точке C . Докажите, что прямая AB параллельна прямой DE .



Доказательство

- 1) Так как $AB = BC$, то треугольник ABC – равнобедренный, следовательно $\angle BAC = \angle BCA$.
- 2) Так как $CD = DE$, то треугольник DEC – равнобедренный, следовательно $\angle ECD = \angle CED$.
- 3) $\angle BCA = \angle ECD$ как вертикальные, следовательно $\angle BAC = \angle CED$, а это углы при прямых AB и DE и секущей AE . Из равенства углов следует, что AB параллельно DE по признаку параллельности прямых.

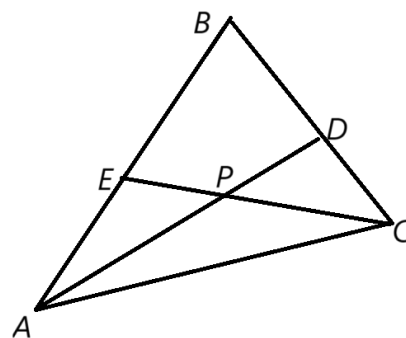
Ч.т.д.

Содержание критерия	Баллы
Ход проведения доказательства утверждения верный, приведена последовательность верных, обоснованных утверждений.	2
Приведены верные теоретические факты, необходимые для доказательства утверждения, но нарушена логика рассуждений. ИЛИ Доказательство в целом верное, но некоторые выводы не достаточно обоснованы.	1
Доказательство не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 5) Внутри треугольника ABC отмечена точка P . Прямые AP и CP пересекают стороны BC и AB в точках D и E соответственно. Известно, что $\angle B = 80^\circ$, $\angle ADC = 100^\circ$ и $\angle AEC = 110^\circ$. Найдите угол APC .

Решение.

- 1) Так как $\angle BDP$ смежный с углом $\angle ADC = 100^\circ$, то $\angle BDP = 80^\circ$.
- 2) $\angle BEP = 80^\circ$, так как он смежный с углом $\angle AEC = 110^\circ$.
- 3) Четырехугольник $EBDP$ может быть представлен как сумма двух треугольников,



например EBP и PBD , тогда сумма углов четырехугольника $EBDP$ равна 360° из чего следует:

$$\angle EPD = 360^\circ - \angle BEP - \angle BDP - \angle EBD = 360^\circ - 80^\circ - 70^\circ - 80^\circ = 130^\circ.$$

4) Таким образом, $\angle APC = \angle EPD = 130^\circ$, как вертикальные.

Ответ: 130° .

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения задачи верный, но получен не верный ответ из-за вычислительной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

6 Постройте графики функций $y = \frac{x+9}{|x+9|}$ и $y = |x+a|$. Найдите все значения параметра a , при которых графики функций $y = \frac{x+9}{|x+9|}$ и $y = |x+a|$ имеют только одну общую точку.

Решение. Графический метод:

1. Рассмотрим функцию $y = \frac{x+9}{|x+9|}$. Если $x+9 > 0$, $x > -9$,

$$\text{то } y = \frac{x+9}{x+9},$$

$$y = 1, \text{ если } x < -9, \text{ то}$$

$$y = \frac{x+9}{-x-9}, y = -1.$$

2. Построим график функции

$y = |x+a|$. Если $x+a \geq 0$, т.е. $x \geq -a$, то $y = x+a$, если $x+a < 0$, т.е. $x < -a$, то $y = -x-a$.

3. С прямой $y = -1$ график функции $y = |x+a|$ общих точек не имеет, так как все значения этой функции не отрицательны. С прямой $y = 1$ график функции $y = |x+a|$ может иметь две общие точки, одну или не иметь общих точек в зависимости от значений параметра a .

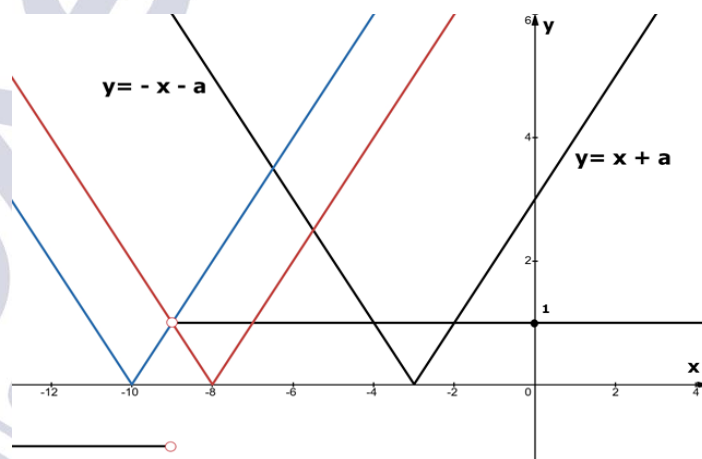
Исследуем эти случаи: а) если левая ветвь $y = -x-a$ графика $y = |x+a|$ проходит через точку с координатами $(-9; 1)$, то точек пересечения – одна. Найдём значение параметра a в этом случае из условия:

$$-(-9) - a = 1, \text{ отсюда } a = 8;$$

б) если правая ветвь $y = x+a$ графика $y = |x+a|$ проходит через точку с координатами $(-9; 1)$, то точек пересечения с $y = 1$ нет.

Найдём значение параметра a в этом случае из условия:

$$-9 + a = 1, \text{ отсюда } a = 10.$$

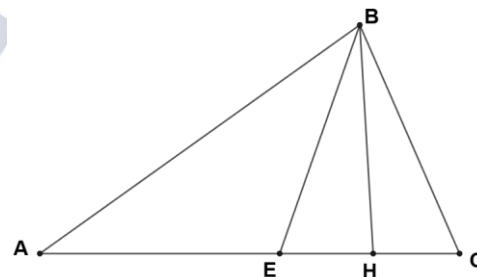


В результате имеем, при $a \in [8; 10)$ графики функций $y = \frac{x+9}{|x+9|}$ и $y = |x+a|$ имеют одну общую точку.

Ответ: $[8; 10)$.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	3
Ход решения задачи верный, но получен не верный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построены графики функций $y = \frac{x+9}{ x+9 }$ и $y = x+a $, но значения параметра a не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

7 Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки длиной 3 см и 1 см. Найдите острые углы этого треугольника.



Решение. Пусть $\angle ABC = 90^\circ$, $BH \perp AC$, $AH = 3$, $HC = 1$.

1) Проведём медиану BE , тогда

$$AE = AC : 2 = (3 + 1) : 2 = 2. \quad BE = AE = EC = 2.$$

2) В треугольнике EBC высота BH является и медианой так как:

$$EH = EC - HC = 2 - 1 = 1 = HC.$$

Следовательно, треугольник EBC – равнобедренный ($BE=EC=2$), и так как $EC = 2$, то треугольник EBC – равносторонний, отсюда

$$\angle EBC = \angle BCE = 60^\circ.$$

3) Так как сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90° , то $\angle BAC = 90^\circ - \angle ECB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Ответ: 30 и 60.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	3
Ход решения задачи верный, получен верный ответ, но решение не обоснованно.	2
Верно выполнены дополнительные построения, однако решение не доведено до конца и ответ не обоснован.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3