Демонстрационный вариант экзаменационной работы по математике (повышенный уровень) для индивидуального отбора в 10 класс ГБНОУ КК «Школа «Поколение»

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа включает в себя 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение работы отводится 120 минут. При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.**

Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа, после чего подробно и обоснованно описать решение в бланках ответов. Решения заданий оцениваются в соответствии с критериями, приведенными ниже.

Задания можно выполнять в любом порядке. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

При выполнении заданий 1 – 7 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его подробное решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво.

1 Решите уравнение $(x^2-x)^2-15(x^2-x)-100=0$.

2 Байдарка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

3 В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD, как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M. Докажите, что $\angle BAM=\angle CAD$.

4 Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 4$ и $MB = 5$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C пересекает прямую AB в точке E. Найдите CE.

5 Постройте график функции $f(x) = \frac{4|x| - 1}{|x| - 4x^2}$. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых графики функций $y = f(x)$ и $g(x) = ax$ не имеют общих точек.

6 Стороны треугольника образуют последовательные три члена возрастающей геометрической прогрессии. Может ли знаменатель этой прогрессии быть больше 2?

7 Найти трёхзначное число, зная, что число его десятков есть среднее геометрическое числа сотен и единиц. Если в его записи поменять местами цифры сотен и единиц и вычесть новое число из искомого, то разность будет равна 297.

Решения и критерии оценки

1 Решите уравнение $(x^2 - x)^2 - 15(x^2 - x) - 100 = 0$.

Решение.

Пусть $x^2 - x = t$, тогда уравнение примет вид: $t^2 - 15t - 100 = 0$. По теореме, обратной теореме Виета имеем $t_1 = 20,\ t_2 = -5$.

Произведём обратную замену:

1. $t = 20$, тогда $x^2 - x = 20$ или $x^2 - x - 20 = 0$, отсюда по теореме, обратной теореме Виета имеем $x_1 = -4,\ x_2 = 5$.

2. $t = -5$, тогда $x^2 - x = -5$ или $x^2 - x + 5 = 0$. $D = -19 < 0$, решений нет.

Ответ: $-4;\ 5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущены вычислительные ошибки, с их учетом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

2 Байдарка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

Решение. Пусть x (км/ч) - собственная скорость байдарки, тогда $x + 2$ (км/ч) – скорость байдарки по течению, $x - 2$ (км/ч) – скорость байдарки против течения. Пусть по направлению от А к В байдарка плывёт по течению, тогда время, затраченное на путь от А до В найдём из выражения $\frac{15}{x+2}$, а на путь от В до А $-\frac{15}{x-2}$. Учитывая, что байдарка в пункте В простояла 1 час 20 мин, а в пункте А отсутствовала 6 часов, получим уравнение:

$$\frac{15}{x+2} + \frac{15}{x-2} + 1\frac{20}{60} = 6$$

Решим полученное уравнение:

$$15\left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}\right) = \frac{14}{3}$$

$$\frac{15x}{x^2-4}=\frac{7}{3}$$

$$7x^2-45x-28=0$$

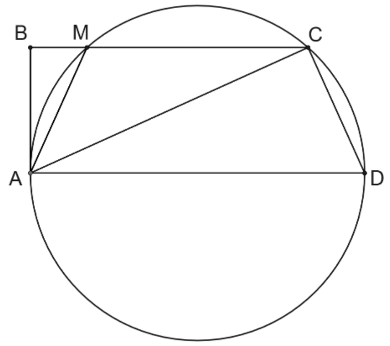
отсюда $x_1=7,\ x_2=-\frac{4}{7}$ – не имеет смысла.

Ответ: 7.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Верно составлена математическая модель задачи, однако решение не доведено до конца. ИЛИ Решение в целом верное, но допущены вычислительные ошибки или не существенные недостатки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

3

В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD, как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M. Докажите, что $\angle BAM=\angle CAD$.



Доказательство.

1) Так как угол BAD прямой, а AD – диаметр, то AB – касательная. Угол BAM образован касательной и хордой, следовательно:

$$\angle BAM=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$$

2) $\angle CAD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$, как вписанный.

3) Так как $BC \parallel AD$, то дуги MA и CD – равны. Следовательно,

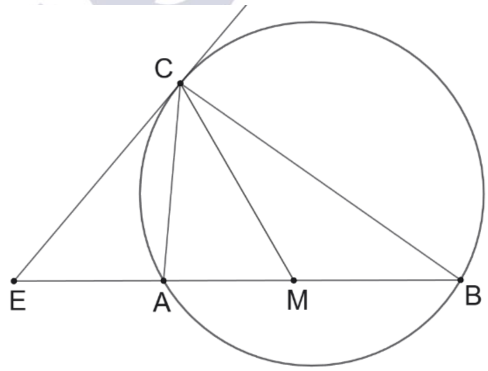
$$\angle BAM=\angle CAD.$$

Содержание критерия	Баллы
Ход проведения доказательства утверждения верный, приведена последовательность верных, обоснованных утверждений.	2
Приведены верные теоретические факты, необходимые для	1

доказательства утверждения, но нарушена логика рассуждений. **ИЛИ** Доказательство в целом верное, но некоторые выводы не достаточно обоснованы.	
Доказательство не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

4

Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AM=4 и MB=5. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C пересекает прямую AB в точке E. Найдите CE.



Решение. 1) Так как CM – биссектриса угла треугольника ABC, то $\frac{AC}{BC}=\frac{AM}{MB}=\frac{5}{6}$.

2) Так как CE – касательная к окружности, а EB – секущая, то

$$CE^2 = AE \cdot EB.$$

3) Угол ECA образован касательной и хордой, а угол CBA – вписанный, тогда $\angle ECA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} = \angle ABC$. В $\triangle ACE$ и $\triangle CEB$ угол CEB – общий, таким образом $\triangle CAE \infty \triangle CBE$ по двум углам. Из подобия имеем, $\frac{AC}{BC}=\frac{CE}{EB}=\frac{5}{6}$. Обозначим AE через x, тогда $EB = x + 11$ и $CE = \frac{5}{6}(x+11)$. Подставим, найденные выражения в $CE^2 = AE \cdot EB$, получим

$$\frac{25}{36}(x+11)^2 = x \cdot (x+11),$$

отсюда $25(x+11) = 36x$ или $25 \cdot 11 = 36x - 25x$, откуда $x = 25$.
Подставим полученное значение x в выражение для CE, получим
$CE = \frac{5}{6}(25+11) = 30.$

Ответ: 30.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	3
Ход решения задачи верный, но получен не верный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно составлена математическая модель задачи. Получены основные соотношения $\frac{AC}{BC}=\frac{CE}{EB}=\frac{5}{6}$ и	1

$\mathrm{CE}^2 = \mathrm{AE} \cdot \mathrm{EB}$, однако решение не доведено до конца.	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

5 Постройте график функции $f(x) = \frac{4|x| - 1}{|x| - 4x^2}$. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых графики функций $y = f(x)$ и $g(x) = ax$ не имеют общих точек.

Решение. 1) Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{4|x| - 1}{|x| - 4x^2}$. Раскроем модуль:

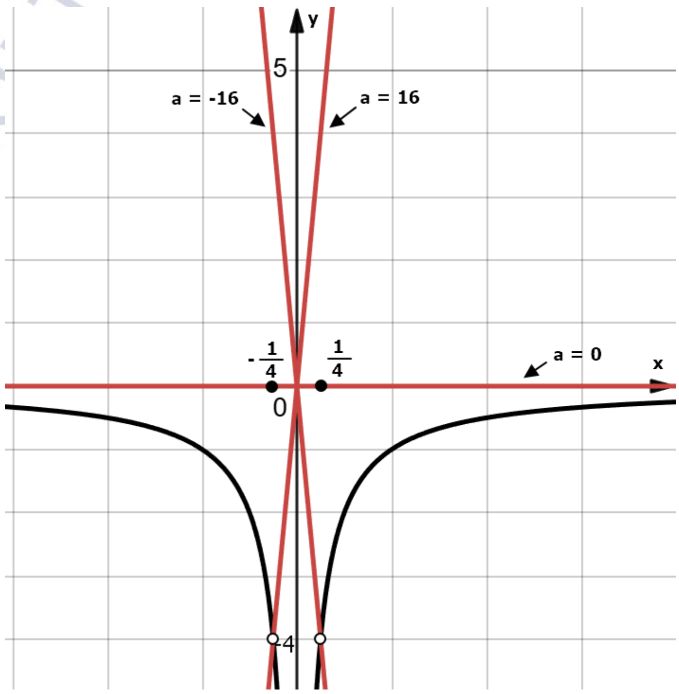
а) Если $x > 0$, то $f(x) = \frac{4x - 1}{x - 4x^2}$; $f(x) = \frac{4x-1}{-x(4x-1)}$; $f(x) = \frac{-1}{x}$, при условии, что $x \neq \frac{1}{4}$.

б) Если $x < 0$, то $f(x) = \frac{-4x - 1}{-x - 4x^2}$; $f(x) = \frac{4x+1}{x(4x+1)}$; $f(x) = \frac{1}{x}$, при условии, что $x \neq -\frac{1}{4}$.

Таким образом, график функции $y = f(x)$ - это при $x > 0$ правая ветка гиперболы $y = -\frac{1}{x}$, а при $x < 0$ левая ветка гиперболы $y = \frac{1}{x}$, причём точки с координатами $\left(\frac{1}{4};\, -4\right)$ и $\left(-\frac{1}{4};\, -4\right)$ выколоты.

2. Рассмотрим функцию $g(x) = ax$, её графиком является прямая линия, проходящая через начало координат.

3. Построим графики функций. Прямая $g(x) = ax$ вращаясь вокруг начала координат пересекает график функции $f(x) = \frac{4|x| - 1}{|x| - 4x^2}$ при любых a за исключением тех случаев, когда $y = ax$ проходит через точки $\left(\frac{1}{4}; -4\right)$ и $\left(-\frac{1}{4}; -4\right)$ и, когда она совпадает с осью OX $(a = 0)$.



а) если $g(x) = ax$ проходит через точку с координатами $\left(\frac{1}{4}; -4\right)$, то найдём a из равенства $-4 = a \cdot \frac{1}{4} - 4 = a \cdot \frac{1}{4}$, отсюда $a = -16$.

б) если $g(x) = ax$ проходит через точку с координатами $\left(-\frac{1}{4}; -4\right)$, то $a = 16$.

Ответ: $0; \pm 16$.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	3
Ход решения задачи верный, но получен не верный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построен график функции $f(x)=\frac{4\lvert x\rvert-1}{\lvert x\rvert-4x^2}$, и верно построена хотя бы одна из прямых $g(x)=ax$, удовлетворяющих условию задачи. В результате в ответе потеряно одно или два из трёх значений параметра.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

6 Стороны треугольника образуют последовательные три члена возрастающей геометрической прогрессии. Может ли знаменатель этой прогрессии быть больше 2?

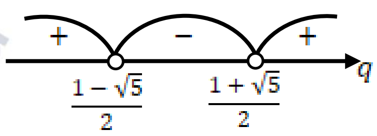
Решение. 1) Пусть a – меньшая сторона треугольника, $q>1$ – знаменатель прогрессии, тогда величины a, aq, aq^2 - являются длинами сторон треугольника.

2) Для любого треугольника справедливо неравенство треугольника, следовательно, т.к. aq^2 – наибольшая из сторон треугольника, то справедливо неравенство:

$$aq^2 < aq + a.$$

3) Рассмотрим, полученное неравенство: $aq^2 - aq - a < 0$, $a(q^2 - q - 1) < 0$. Так как a – сторона треугольника, то $a > 0$, тогда $q^2 - q - 1 < 0$. Найдём корни трёхчлена $q^2 - q - 1 = 0$, $q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$, $q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Неравенство примет вид: $\left(q - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(q - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0$, используя метод интервалов, получим:



Отсюда $1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4) Сравним значения $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и 2, рассмотрим $1+\sqrt{5}$ и 4, $\sqrt{5}$ и 3. Так как оба числа положительны, то можно возвести оба числа в квадрат $5 < 9$, тогда $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$. Таким образом, если $q \geq 2$, то треугольника не существует.

Ответ: нет.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	4
Ход решения задачи верный, получен верный ответ, но решение не содержит обоснования того факта, что $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$	3
Ход решения задачи верный, но получен не верный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена геометрическая прогрессия и записано условие выполнения неравенства треугольника, однако решение не доведено до конца и ответ не обоснован.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

7 Найти трёхзначное число, зная, что число его десятков есть среднее геометрическое числа сотен и единиц. Если в его записи поменять местами цифры сотен и единиц и вычесть новое трёхзначное число из искомого, то разность будет равна 297.

Решение. 1) Представим трёхзначное число в виде $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, из условия следует, что $a \neq 0$ и $b^2 = a \cdot c$.

2) Если поменять местами цифры сотен и единиц, то получим трёхзначное число

$$\overline{cba} = 100c + 10b + a.$$

3) Рассмотрим разность между данным и полученным. Из условия задачи следует, что эта разность равна 297. Получим уравнение: $100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 297$, или $99a - 99c = 297$, отсюда $a - c = 3$.

4) В результате рассуждений получили систему $\begin{cases} b^2 = a \cdot c, \\ a - c = 3, \\ a \neq 0, c \neq 0; \end{cases}$ отсюда

$$\begin{cases} a = 3 + c, \\ b^2 = (3 + c) \cdot c \end{cases}$$

Так как a, b и c – цифры, то могут принимать одно из значений $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Рассмотрим возможные случаи:

А) Пусть $c = 1$, тогда $b^2 = 4$, $b = 2$, $a = 4$, получили число 421, которое удовлетворяет условию задачи.

В) Пусть $c = 2$, тогда $b^2 = 10$, натурального b, удовлетворяющего этому условию не существует.

Г) Пусть $c = 3$, тогда $b^2 = 18$, натурального b, удовлетворяющего этому условию не существует.

Д) Пусть $c = 4$, тогда $b^2 = 28$, натурального b, удовлетворяющего этому условию не существует.

Е) Пусть $c = 5$, тогда $b^2 = 40$, натурального b, удовлетворяющего этому условию не существует.

Ж) Пусть $c = 6$, тогда $b^2 = 54$, натурального b, удовлетворяющего этому условию не существует.

З) Пусть $c = 7$, тогда $b^2 = 70$, натурального b, удовлетворяющего этому условию не существует.

И) Пусть $c = 8$, тогда $b^2 = 88$, натурального b, удовлетворяющего этому условию не существует.

К) Пусть $c = 9$, тогда $b^2 = 108$, натурального b, удовлетворяющего этому условию не существует.

Ответ: 421.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, обоснованно получен верный ответ	4
Ход решения задачи верный, получен верный ответ, однако он не обоснован.	3
Ход решения задачи верный, но получен не верный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель задачи (система уравнений), однако решение не доведено до конца и ответ не обоснован.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4